„Mit gutem Beispiel vorangehen“ – zum Prinzip des beispielgebundenen Zugangs zur Leitidee Daten und Zufall

Markus Vogel, Heidelberg & Andreas Eichler, Kassel

Zusammenfassung: *Beispiele sind im Mathematikunterricht allgegenwärtig, über sie werden allgemeinere mathematische Einsichten bis in den Einzelfall hinein konkretisiert. In einem datenbasierten Stochastikunterricht ist die beispielhafte Konkretisierung schon durch die Daten und ihren kontextuellen Hintergrund genuin gegeben. In diesem Beitrag werden anhand eines Unterrichtsvorschlags im Themenbereich Konfidenzintervalle didaktische Überlegungen zur Wertigkeit einführender Beispiele angestellt, Kriterien zur didaktischen Beurteilung ihrer unterrichtlichen Gangbarkeit abgeleitet und reflektiert, welche Zugänge zur Leitidee Daten und Zufall durch geeignete Beispiele eröffnet werden können.*

1 Vorweg

„Mit gutem Beispiel vorangehen“ – das ist ein Motto, das sich sprichwörtlich in der Weisheit des Volksmundes niedergeschlagen hat. Mit dem, was damit gemeint ist, lässt sich unserer Auffassung nach aber auch ein didaktisches Prinzip umschreiben, mit dem sich geeignete Einstiege in Themen und Leitideen des Mathematikunterrichts charakterisieren lassen. Daher greifen wir in diesem Beitrag für ein Heft von Stochastik in der Schule darauf zurück, bei dem die Reflexion der zurückliegenden 10 Jahre der Leitidee Daten und Zufall im Vordergrund steht.

Um dem Anspruch dieses Mottos auch in der Struktur dieses Beitrages gerecht zu werden, beginnen wir nach dieser kurzen Einführung direkt in Kapitel 2 mit einer Beispielidee zur unterrichtlichen Umsetzung des Themas Konfidenzintervall. Im anschließenden Kapitel 3 stellen wir anhand des vorausgehenden Beispiels drei Kriterien dar, die bei der Reflexion von geeigneten Beispielen in der Unterrichtsplanung und -auswertung hilfreich sein können. In Kapitel 4 erweitern wir den Fokus, in dem wir über das Leitbeispiel dieses Beitrags hinausgehen, und darlegen, welche Beispiele sich eignen, um im Rahmen eines datenorientierten Stochastikunterrichts Zugänge zu unterschiedlichen Arten von Datenanalysen (vgl. Eichler, 2009; Eichler & Vogel, 2013) zu schaffen. Die vorausgehenden Überlegungen zur didaktischen Bedeutsamkeit von Beispielen werden abschließend in den Zusammenhang der bildungstheoretischen Didaktik eingeordnet.

2 „Warum sind die Fotos so groß?“

Neben verschiedenen anderen Einsichten in Fragen der Gestaltung und Produktion einer Tageszeitung lässt sich mit Blick auf Abbildung 1 unmittelbar die Frage ableiten, wie hoch eigentlich der Textanteil in einer Tageszeitung (oder einer Illustrierten) ist.

In einer offenen Aufgabe formuliert lässt sich daraus ein handlungsorientierter Unterrichtsgang rund um die Themen Stichprobenziehung und Konfidenzintervalle ableiten:

> Bestimmen Sie über eine Stichprobenziehung den Anteil, den der Text in der gesamten Zeitung einnimmt.
>
> Entwickeln Sie entsprechend eine Methode, mit der Sie den Textanteil in einer ganzen Zeitung schätzen. Vergleichen Sie mit dieser Schätzmethode verschiedene Zeitschriften oder Zeitungen.

Im Dialog

Warum sind die Fotos so groß?

Sehr geehrte Damen und Herren, in letzter Zeit kommt es mir vor, als ob ich eine „Bilder-Zeitung“ in der Hand habe und nicht die seit langer Zeit abonnierte Tageszeitung StN. Glauben Sie wirklich, dass Ihre Leser dermaßen großformatige Aufnahmen sehen möchten? Einen interessanten Bericht zu lesen wäre besser, meine ich und bin damit sicher nicht alleine. Oder fehlt es da an Themen?

Frage von [redacted] Stuttgart

Völlig richtig: An interessanten Themen fehlt es nie. Nur würden die ohne Bebilderung kaum Leser finden. Lauter Berichte ohne optische Anreize – das wäre eine unattraktive „Bleiwüste“. Lesen ist schließlich Arbeit, und diese Arbeit sollte so verlockend wie möglich erscheinen, zum Beispiel durch gute Bilder. Schließlich ist das Erste, was der Leser auf einer Seite wahrnimmt, das Foto. Die Größe des Bildes signalisiert: Dieses Thema hat Gewicht. Was jeweils wichtig ist, da können die Meinungen sicher mal auseinandergehen.

[redacted] Ressortleiterin Gestaltung

Abb. 1: Leserbrief aus den Stuttgarter Nachrichten vom 8.3.2014

Hinter dem offenen Aufgabenformat (vgl. z. B. Herget, 2000; Büchter & Leuders, 2005, S. 88 ff.) steht die Vorstellung, dass die Schülerinnen und Schüler Gelegenheit erhalten, selbständig und reflektiert mathematische Eigeninitiative zu entwickeln. Dieses Aufgabenformat, das insbesondere im Gefolge einer Studie der Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (BLK) zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (BLK, 1997) in einem Modul der Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Fach Mathematik erhöhte Aufmerksamkeit gefunden hat, setzt freilich Vorerfahrungen auf Seiten von Lehrkraft und Schülerschaft voraus. Ist dies (noch) nicht gegeben, können differenzierte Arbeitspräzisierungen kurzfristig bei der konkreten unterrichtlichen Umsetzung und langfristig bei der sukzessiven Etablierung einer entsprechenden Unterrichtskultur helfen:

Arbeitsblock 1 (Stichprobenziehung) Bilden Sie zur Bearbeitung Gruppen mit 3–4 Personen:

- Schätzen Sie vor dem Öffnen den Textanteil in der gesamten Zeitung. Halten Sie Ihre Überlegungen und Ihre resultierende Schätzung fest.
- Ziehen Sie mittels eines Lochers eine zufällige Stichprobe von vorab vereinbartem Umfang und ermitteln Sie den Textanteil.
- Schätzen Sie, wie die Textanteile in den übrigen Gruppen und zusammengefasst für die gesamte Gruppe aussehen werden. Begründen Sie!
- Dokumentieren Sie alle in der Gesamtgruppe ermittelten Textanteile in Tabellen- und Diagrammform. Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie?

In diesem ersten Arbeitsblock können die Schülerinnen und Schüler mit dem Locher die entscheidende Frage einer Stichprobenziehung erarbeiten: Wie ist zu gewährleisten, dass die Stichprobe wirklich zufällig und damit repräsentativ für die Zeitung wird? Würden beispielsweise nur die Zeitungsränder gelocht, wird sicherlich eine systematische Datenverzerrung zu erwarten sein, da die Ränder nicht bedruckt sind.

In unserem Unterrichtsgang haben wir die Frage so gelöst gesehen, dass die einzelnen Doppelseiten der untersuchten Zeitung zunächst zufällig durchmischt wurden. Anschließend wurde blind eine Doppelseite gezogen, die anschließend ebenfalls zufällig, d. h. nicht entlang der Zeitungskanten und auch nicht parallel bzw. orthogonal dazu, dreimal gefaltet wurde, um anschließend gelocht zu werden. Nach dem Auffalten wurden die ausgestanzten Löcher (auf beiden Seiten) darauf hin ausgezählt, ob durch das Loch ein Buchstabe oder Buchstabenanteil ausgetanzt wurde (bzgl. Überschriften, Werbung oder sonstigen inhaltlichen Kriterien wurde nicht unterschieden) oder nicht (Abb. 2). Anschließend wurde die Seite in den Stapel zurückgelegt und die gesamte Prozedur viermal wiederholt. Das Ergebnis wurde als eine Stichprobenziehung gewertet.

Abb. 2: Beispiel für eine Stichprobenziehung zur Bestimmung des Textanteils in einer Zeitung

Bei acht auf diese Art zustande gekommenen Stichproben ergaben sich dabei folgende Daten für eine Ausgabe der Stuttgarter Zeitung vom 15.02.2014 (Angaben: Stichprobennummer: Anzahl der Löcher – Anzahl Textlöcher – rel. Häufigkeit):

StP_01: 92-39-0,424	StP_02: 84-60-0,714
StP_03: 92-60-0,652	StP_04: 76-41-0,539
StP_05: 88-55-0,625	StP_06: 76-24-0,316
StP_07: 98-30-0,306	StP_08: 96-40-0,417

Bei Aggregierung der Daten ergibt sich bei einer Anzahl von insgesamt 702 Löchern und einer Anzahl von Löchern mit Textanteil von 349 eine relative Häufigkeit von 0,497. Der aggregierten Stichprobe werden die Schülerinnen und Schüler aufgrund des größeren Umfangs (unter Voraussetzung gleicher Ziehungsmodalitäten) größeres Vertrauen schenken. Allerdings stellt sich unserer Erfahrung nach angesichts der Streuung, die sich in der Zusammenschau der einzelnen Stichproben zeigt, auch den Schülerinnen und Schülern unmittelbar die Frage nach der Verlässlichkeit dieser Zahlen und der darauf basierenden Punktschätzung. Damit schließt sich unmittelbar der nächste Arbeitsschritt, die Entwicklung einer Schätzmethode für die Intervallangabe eines Vertrauensbereichs, schlüssig an.

Arbeitsblock 2 (Schätzmethode entwickeln):

In diesem Arbeitsblock geht es darum, eine Methode zu entwickeln, mit der ein Intervall geschätzt werden kann, welches in durchschnittlich 95 % von 100 vergleichbaren Fällen einen zuvor ermittelten relativen Textanteil enthält.

- Was ist der Sinn eines solchen Intervalls, welche Information gewinnt man dadurch? Formulieren Sie mit eigenen Worten.

Bei der Bestimmung eines solchen Intervalls soll mit dem Werkzeug der Binomialverteilung gearbeitet werden.

- Vergegenwärtigen Sie sich die grundlegenden Eigenschaften der Binomialverteilung.
- Verwenden Sie die Daten aus der Stichprobe des Arbeitsblocks 1, um die Parameter einer Binomialverteilung festzulegen. Interpretieren die so festgelegte Binomialverteilung im Zeitungskontext der Stichprobenziehung.

Benutzen Sie eine Simulationsdatei, um den Wahrscheinlichkeitsparameter p der Binomialverteilung gezielt zu variieren:

- Bestimmen Sie p so, dass nur noch 5 % der Verteilung über dem Textanteil liegen. Interpretieren Sie diesen p-Wert im Kontext.
- Bestimmen Sie p einmal so, dass nur noch 2,5 % der Verteilung über dem Textanteil liegen (p_u) und einmal so, dass 2,5 % der Verteilung unter dem Textanteil liegen (p_o).
- Interpretieren Sie das Intervall $[p_u; p_o]$ in mathematischer und in kontextueller Hinsicht.

Vergleichen Sie anschließend das Simulationsergebnis mit dem Formelergebnis für ein Näherungsintervall (Schulbuch).

Die im zweiten Arbeitsblock vorgeschlagene Zugangsweise geht nicht den algorithmischen Weg über die Vorgabe und Anwendung der Formel. Sie spiegelt eine induktive Zugangsweise wider, bei der Schülerinnen und Schüler das ihnen zur Verfügung stehende mathematische Werkzeug der Binomialverteilung mit den zugrundeliegenden mathematischen Modellvoraussetzungen in einem Sachkontext kritisch reflektierend zur Anwendung bringen können. Diese Vorgehensweise folgt der Idee Vollraths (2003), Funktionen zur Umwelterschließung (was die mathematische Welt explizit einschließt) zu nutzen. Dazu gehören außer der Lösung selbst mathematische Begründungen für die Vorgehensweise, z. B. die Legitimation mit der Binomialverteilung (Text vs. Nicht-Text) zu arbeiten oder die Modellannahme, dass die Stichproben durch die gleiche Ziehungsvorschrift zustande gekommen sind und zumindest prinzipiell beliebig oft wiederholbar sind. Diese Vorgehensweise folgt den Überlegungen von Vehling (2011) und von Eichler & Vogel (2011; 2012).

Mit einer entsprechenden Rechner-Datei (Fathom, Excel, Geogebra oder TI-Nspire), die je nach Kenntnisstand der Klasse und der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit entweder durch die Schülerinnen und Schüler selbst erstellt oder von der Lehrkraft vorgegeben wird, kann die Binomialverteilung für ein 95 %-Konfidenzintervall durch gezieltes Ausprobieren mit einem Schieberegler für den Wahrscheinlichkeitsparameter p so angepasst werden, bis

- nur noch 2,5 % der von der Binomialverteilung eingeschlossenen Fläche oberhalb des ermittelten Textanteils h_a liegen (p_u)
- nur noch 2,5 % der von der Binomialverteilung eingeschlossenen Fläche unterhalb des ermittelten Textanteils h_a liegen (p_o)

wobei p_u und p_o die Grenzen des Konfidenzintervalls kennzeichnen.

Arbeitsblock 3 (Schätzmethode vertiefen):

- Legen Sie die Anteile p_u und p_o symmetrisch um den ermittelten Textanteil. Wie lässt sich dies mathematisch als sinnvoll rechtfertigen?
- Untersuchen Sie mit der Simulationsdatei
  - den Einfluss unterschiedlicher Konfidenzniveaus (z. B. 99 %, 95 %, 80 %) bei gleichbleibender Stichprobengröße und
  - den Einfluss unterschiedlicher Stichprobengrößen bei gleichbleibendem Konfidenzniveau

  auf die Intervallbreite: Was bedeutet dies für den Informationsgehalt?

Interpretieren Sie Ihr Arbeitsergebnis bezogen auf die Frage nach dem Textanteil in der gesamten Zeitung.

Formulieren Sie ein Fazit.

Wenn die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen mit der Entwicklung der Schätzmethode gesammelt haben, dann kann man im Sinne einer effizienteren Vorgehensweise noch einen Schritt weiter gehen.

Da für hinreichend großes n die Verteilungen nahezu symmetrisch sind, können die Grenzen p_u und p_o per Konvention auch symmetrisch um den empirisch ermittelten Textanteil h_a gelegt werden. Das Konfidenzintervall ergibt sich dann zu:

$[h_a - (h_a - p_u);\ h_a + (h_a - p_u)] = [p_u;\ 2 \cdot h_a - p_u]$. Auf diese Weise lässt sich die Bestimmung des Konfidenzintervalls mit nur einem Schieberegler für p_u in einem Vorgang erledigen.

Im vorliegenden Fall der oben genannten Daten ergibt sich so das ermittelte, in Abbildung 3 gezeigte Konfidenzintervall von [0,460; 0,534] für den relativen Textanteil $h_a = 0{,}497$. Es zeigt sich, dass in ca. 4,9 % von 100 vergleichbaren Fällen die unbekannte wahre Wahrscheinlichkeit außerhalb des Intervalls liegen würde. Die Interpretation dieses Sachverhalts ist ebenso Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler wie die Bestimmung des Konfidenzintervalls selbst.

	Treffer	Gesamt	rel. H.
	349	702	0.497...
	<349	>349	
$\text{Anteil}_{\text{BVert}}$	0.9778110749	0.0221889251	
$\text{Anteil}_{\text{BVert}}$	0.0265731139	0.9734268861	
	$\text{Anteil}_{\text{BVert}_{\text{außerhalb}}}$	0.048762039	
Konfidenz	p_u	p_o	
	0.46	0.5343019943	

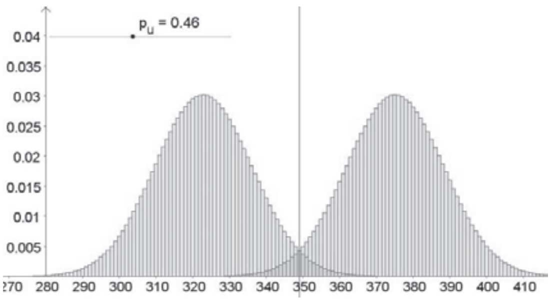

Abb. 3: Rechnergestützte Bestimmung eines Konfidenzintervalls

Wenn man von der annähernd symmetrischen Verteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße ausgehen kann (als Faustformel gilt dies bei einer Varianz $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$), lassen sich die bekannten Sigma-Regeln für die Normalverteilung als Abschätzung für die Binomialverteilung nutzen. Als Näherungsintervalle ergeben sich:

$$h_n \pm \frac{1{,}96\sqrt{h_n(1 - h_n)}}{\sqrt{n}} \text{ oder } h_n \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(da die Wurzel im Zähler mit $0 \le h_n \le 1$ maximal den Wert 0,5 annimmt, was bei Multiplikation mit dem Faktor 1,96 nach oben abgeschätzt zu einem Zählerwert von 1 führt). Das Konfidenzintervall ergibt sich als Lösung einer (umständlich zu lösenden) Ungleichung

$$|p - h_n| \le \frac{1{,}96\sqrt{p(1 - p)}}{\sqrt{n}}.$$

Wenn sich die Schülerinnen und Schüler im vorliegenden Fall der Mühe unterziehen, das Konfidenzintervall über die Lösung dieser Ungleichung zu ermitteln, werden sie feststellen, dass Näherung und exakte Berechnung bis auf drei Nachkommastellen übereinstimmen.

Neben dieser Feststellung ist aber in didaktischer Hinsicht insbesondere wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler mit der Rechner-Datei die Möglichkeit haben, den Einfluss unterschiedlicher Konfidenzniveaus und unterschiedlicher Stichprobengrößen auf Intervallbreite und Informationsgehalt zu untersuchen, um so die Grundidee eines Konfidenzintervalls besser verstehen zu lernen:

- Vergrößern sie das Konfidenzniveau auf 99 %, vergrößert sich auch das Konfidenzintervall auf [0,448; 0,546].
- Bei der Betrachtung einer kleineren Stichprobe (etwa StP_01 anstelle der aggregierten Stichprobe) ergibt sich bei gleichbleibendem Konfidenzniveau von 95 % ebenfalls ein vergrößertes Konfidenzintervall von [0,323; 0,525].

Aus weiteren Versuchen des systematischen Probierens werden die Schülerinnen und Schüler zum einen feststellen können, dass bei Erhöhung des Konfidenzniveaus das Konfidenzintervall (bei gleichbleibender Stichprobengröße) größer wird, dafür aber der Informationsgehalt sinkt. Andererseits wird das Konfidenzintervall bei Erhöhung der Stichprobengröße (unter Voraussetzung gleicher Modalitäten der Stichprobenziehung und gleichbleibendem Konfidenzniveau) kleiner, der Informationsgehalt steigt. Im Kontext des Zeitungsbeispiels heißt dies, dass man die Stichprobe erhöhen (Anzahl der Lochungen) oder das Konfidenzniveau (z. B. 90 % oder 80 %) senken muss, um ein kleineres Konfidenzintervall zu erhalten und dadurch den Informationsgehalt zu erhöhen. Bei der Erhöhung der Stichprobe kann man sich allerdings die Erhöhung des Informationsgehalts nur durch erhebliche Anstrengung erkaufen, da der Faktor m, mit dem man die Stichprobe erhöht nur mit der Wurzel ($\sqrt{m}$) in die Verkleinerung des Konfidenzintervalls eingeht.

Arbeitsblock 4 (Schätzmethode anwenden):

- Wenden Sie die erarbeitete Schätzmethode für den Textanteil in einer anderen Zeitschrift und/oder eine Zeitung an.
- Vergleichen Sie die verschiedenen Schätzungen. Welche Schlussfolgerungen lassen sich ziehen?

Beim Vergleich sollten sich beispielsweise bildlastige Illustrierten und textlastige Zeitungen voneinander unterscheiden lassen. Bei einer Stichprobenziehung aus einer Bildillustrierten, die entsprechend der Vorgehensweise im Arbeitsblock 1 vorgenommen wurde ergab sich folgender Datensatz für eine Januarausgabe der Bildillustrierten View im Jahr 2014 (Angaben: Stichprobennummer: Anzahl der Löcher – Anzahl Textlöcher – rel. Häufigkeit):

StP_01: 86-8-0,093	StP_02: 92-11-0,120
StP_03: 96-5-0,052	StP_04: 96-26-0,271
StP_05: 92-4-0,043	StP_06: 84-8-0,095
StP_07: 90-0-0,000	StP_08: 86-12-0,140

Daraus ergibt sich für die entsprechend aggregierte Stichprobe von 74 Textlöchern (bei einer Gesamtzahl von 722 Löchern und einem relativen Anteil von 0,102 ein Konfidenzintervall von [0,08; 0,125] für den relativen Textanteil. Interpretieren die Schülerinnen und Schüler diese Ergebnisse auf dem Hintergrund der einführenden Leseranfrage, lässt sich festhalten, dass die gedruckte Informationsweitergabe verschiedenen Bewertungskriterien unterliegt. Der Ausdruck „Blei-Wüste“ zeigt, dass der angemessene Anteil einer Bebilderung den Fluss und die Motivation des Lesevorgangs unterstützen soll. Die für die Tageszeitung und Bildillustrierten ermittelten Werte scheinen in ihrer Größenordnung durchaus glaubhaft (was sich auch durch entsprechende Nachfragen bei den Verlagen bestätigt). So legitimiert sich die mathematische Zugangsweise auch im Hinblick auf die nachträgliche Bestätigung aus der „Real-Welt“. Dieser Umstand birgt in didaktischer Hinsicht großes Potential, die Relevanz und Belastbarkeit des eigenen mathematischen Tuns für die Schülerinnen und Schüler erfahrbar werden zu lassen. So kann in pädagogischer Hinsicht ein Beitrag dazu geleistet werden, das Zutrauen der Schülerinnen und Schüler in die eigenen mathematischen Fähigkeiten zu stärken.

3 Kriterien zur Beurteilung und Generierung von Beispielen

Beispiele stehen als musterhafter Einzelfall für etwas Allgemeineres dahinter und weisen (im Idealfall) prototypisch auf den oder zumindest einen wesentlichen Aspekt dessen hin, worum es im Kern gehen soll. Im Zusammenhang von Fragen des Lehren und Lernens wusste bereits Seneca über das Potential von Beispielen festzuhalten: „longum iter est per praecepta, breve et efficax per exempla.“ [„Durch Lehren ist der Weg lang, durch Beispiele ist er kurz und wirksam.“, Übersetzung der Autoren] Hinter dieser Auffassung steckt die Einsicht bzw. die Erfahrung, dass das hinter einem Beispiel stehende Allgemeinere in inhaltlicher Hinsicht umfassender und in struktureller Hinsicht tiefer und dichter vernetzt ist und eine größere Abstraktion zulässt. Es erschließt sich dem Experten, der bereits kundig ist und der sich ein abstraktes Bild des Allgemeineren aus einer Vielzahl vorausgegangener (in der konkreten Erinnerung vermutlich meist „gesunkener“) Beispiele synthetisieren kann – es ist für den Experten gewissermaßen konkret genug geworden. Novizen sind demgegenüber auf konkrete Beispiele angewiesen, die ihnen aus ihrer bisherigen Denk- und Erfahrungswelt heraus einen konkreten Zugang zu den hinter den Beispielen stehenden allgemeineren Ideen eröffnen.

An dem einführenden Beispiel des „Zeitungslochens“ als handlungsorientierte unterrichtliche Umsetzung zum Thema Stichprobenziehung und Konfidenzintervall lassen sich didaktische Kriterien festmachen, die bei der Gestaltung und Beurteilung beispielgebundener Zugänge relevant sind:

Schülerwelt-Bezug:

Entsprechende Beispiele sollten den Schülerinnen und Schülern einen möglichst unmittelbaren und konkreten, im wörtlichen Sinn „greifbaren“ Zugang zur zentralen Fragestellung eröffnen. Inhaltlich stellen solche Beispielaufgaben, die Freudenthals paradigmatischen Grundgedanken von „Beziehungshaltigkeit“ (Freudenthal, 1973, S. 75 ff.) folgen, Problemstellungen dar, die den Schülerinnen und Schülern Lerngelegenheiten bieten sollen, „Phänomene ihrer natürlichen, technischen, geistigen und sozialen Umwelt“ (Klieme, Neubrand, & Lüdtke, 2001, S. 142) zu erschließen.

Wenn in diesem Zusammenhang von Problemauthentizität gesprochen wird, ist damit weder gemeint, dass nur wirkliche Probleme der natürlichen, technischen und gesellschaftlichen Umwelt den Schülerinnen und Schülern zur Bearbeitung vorgesetzt werden dürften. Dies müsste schon allein an der Tatsache scheitern, dass die meisten Probleme mit diesem Anspruch für die unterrichtliche Aufbereitung schlicht zu komplex und zu zeitaufwändig wären (gleichwohl gibt es geeignete Beispiele, die dann auch Eingang in den Unterricht finden sollten, vgl. Abschnitt 4). Auch eine in der Unterrichtspraxis immer wieder zu beobachtende motivationale „Anbiederung“ an die vermeintliche Erlebnis- und Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler durch entsprechend kontextuell adaptierte Beispiele funktioniert in der Regel nicht, ohnehin nicht für alle Schülerinnen und Schüler einer Klasse. Es geht schlicht um die unmittelbare intellektuelle Fassbarkeit der dem Beispiel zugrundeliegenden

Idee: Im Textlochen-Beispiel wird ein Unterrichtspraktiker zweifellos davon ausgehen, dass Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe in der Lage sind, die Idee der Stichprobenziehung hinter dem Beispiel zu sehen. Eine erste Schätzung ist nicht nur in statistischer Hinsicht wichtig, sie liefert auch in didaktischer Hinsicht das Motiv zur Überprüfung, sie löst das fragende Interesse aus. Die praktische Zugangsmöglichkeit der verwendeten Materialien (Locher, Zeitung und Rechner), kann dann bei allen Folgeschritten der Datenerhebung (Lochen als Stichprobenziehung), -aufbereitung (von der Punktschätzung zur Intervallschätzung) und -bewertung (Interpretation und Vergleich mit der vorausgehenden Schätzung) immer wieder eine praktische Referenz liefern: Einen „sicheren Hafen“ als Rückzugsmöglichkeit ins Konkrete, wenn die theoretischen Überlegungen schwer werden. Dennoch können auch Beispiele, die bewusst für den Unterricht in einen für Schülerinnen und Schüler fassbaren Kontext gesetzt werden, durchaus Parallelität zu realen Beispielen aufweisen: Genauso, wie eine beliebige Eigenschaft etwa der Deutschen Bevölkerung prinzipiell bekannt sein kann, ist auch der Textanteil einer Zeitung bekannt. Da aber die exakte Erhebung praktisch nicht möglich scheint, behilft man sich mit einer möglichst gut konstruierten Stichprobe, um den wahren Anteil abzuschätzen.

Mathematik-Bezug:

In mathematischer Hinsicht ist von Bedeutsamkeit, dass das mathematische Konzept oder Verfahren, das zu erlernen im Beispiel angebahnt werden soll, sich in der Modellierung des Beispielkontextes im Kern abbilden und glaubhaft rechtfertigen lässt. So liegt bereits der Auswahl einer konkreten Tageszeitung, deren Seiten gelocht werden, die Annahme zugrunde, dass diese repräsentativ für die Grundgesamtheit aller dieser Tageszeitungen ist (zumindest für die Jahrgänge, die dem gleichen layouttechnischen Verfahren unterworfen sind). Zudem wird dem Vorgang des Lochens als zufälliger Ziehungsvorgang interpretiert implizit unterstellt, unendlich oft wiederholbar zu sein. Darin steckt die Annahme und Begründung für die Beurteilung der Stichprobe als repräsentativ für die Grundgesamtheit gelten zu können. Dabei wird mit dem Maß der Anzahl von ausgestanzten Kreisflächen gemessen, auch dies eine modellierungstechnische Entscheidung, zu der es durchaus Alternativen gibt. Dem Lochungsverfahren liegen folgende mathematische Überlegungen zugrunde: Das n-Tupel von Zufallsgrößen $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ beschreibt die mathematische Stichprobe vom Umfang n, die Zufallsgröße X_i beschreibt die zufällige Merkmalsausprägung des i-ten Loches. Es wird die Annahme zugrunde gelegt, dass alle X_i der gleichen Ziehungsvorschrift unterliegen und somit die gleiche Verteilung F_X besitzen. Eine konkrete Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit x_i als Merkmalsausprägung des i-ten Loches (1 für Text, 0 für kein Text) ist eine empirische Realisierung der mathematischen Stichprobe, also z. B. im Fall von der o. g. StP_01 bei der Bildillustrierten View ein 86er Tupel von Nullen und Einsen mit insgesamt 8 Einsen.

Mathematische Überlegungen dieser Art werden im Allgemeinen nicht mit den Schülerinnen und Schülern im Vorhinein diskutiert werden (können), ohnehin nicht bei einer beispielgebundenen induktiven Zugangsweise zu einem mathematischen Konzept, wie hier im oben geschilderten Zugang zum Konfidenzintervall über die Grenzbetrachtungen entsprechend überlappender Binomialverteilungen im Zeitungsbeispiel. Die Lehrkraft muss sich aber im Klaren über den mathematischen Hintergrund des gewählten Zugangsbeispiels sein, um beurteilen zu können, ob sich die von den Schülerinnen und Schülern zu leistende Modellierung mathematisch rechtfertigen lässt und auf eine adäquate mathematische Begrifflichkeit führen kann.

Unterrichtspraktische Umsetzung:

Dieser Aspekt ist ganz von der Pragmatik unterrichtlicher Umsetzbarkeit geprägt: Die schönste, schülernahste und mathematisch gehaltvollste Beispielidee nützt nichts, wenn sie sich nicht mit einem angemessenen Aufwand an zeitlichen und sächlichen Ressourcen im Unterricht realisieren lässt. Unterrichtspraktiker, die sich dem engen schulischen Zeitkorsett vor Ort ausgesetzt sehen, haben einen Begriff für diesen Umstand: Feiertagsstunden. Es mag in gewisser Weise das Schicksal eines datenorientierten Stochastikunterrichts sein, einerseits zwar durch die Daten vermittelt authentische und gehaltvolle Modellierungsaktivitäten initiieren zu können (dies sind tatsächlich Feiertagsstunden in bestem Sinne) wie dies kaum in anderen Bereichen der Mathematik möglich ist, andererseits dies aber mit einem erhöhten unterrichtlichen Zeitbedarf – etwa gegenüber einer kalkülorientierten unterrichtlichen Abhandlung der kombinatorischen Grundfiguren – zu bezahlen (zumindest in der häufig geäußerten Wahrnehmung betreffender Lehrkräfte). Umso wichtiger ist, dass sich der materielle Aufwand in überschaubaren Grenzen hält und auch der oftmals als vermeintlich unmathematisch betrachtete Teil, die Datenerhebung (so denn eine geplant oder vonnöten ist) nicht zuviel Zeit in Anspruch nimmt.

Im vorliegenden Beispiel des Zeitungslochens sind beide Kriterien, sparsamer sächlicher und zeitlicher Ressourcenverbrauch, gegeben: Locher gibt es genügend in jeder Schule, Zeitungen oder Illustrierten sind problemlos zu beschaffen (hier können die Schülerinnen und Schüler eigene, für sie interessante Zeitschriften mitbringen) und die Datenerhebung ist rasch gemacht. Nach unseren Erfahrungen ist bei Vorgabe geeigneter Rechner-Dateien und Arbeitsblätter[1] die unterrichtliche Umsetzung mitsamt der Datenerhebung in einer Doppelstunde machbar, was freilich nicht heißen soll, dass damit das Thema Konfidenzintervalle abschließend behandelt worden wäre.

Es mögen sicherlich noch weitere und individuellere Faktoren der Unterrichtsplanung bei der didaktischen Bewertung eines beispielgebundenen Zugangs eine Rolle spielen: Wir haben an dieser Stelle diejenigen herausgehoben, die sich aus der strukturellen Zusammenschau verschiedener didaktischer Modelle (etwa der bildungstheoretischen Didaktik nach Klafki, 1957 oder der lehrtheoretischen Didaktik nach Schulz, 1970) unseres Erachtens am unmittelbarsten ergeben.

4 Beispiele schaffen Zugänge

Allgemein bezogen auf den Mathematikunterricht erfolgt ein solcher beispielbezogener Zugang in der Regel über das eingesetzte Aufgabenmaterial. In den Jahren seit den ersten Veröffentlichungen von TIMSS und PISA wurde viel an mathematikdidaktischer Entwicklungs- und Forschungsarbeit in diesem Bereich geleistet (vgl. z. B. Herget, 2000; Büchter & Leuders, 2005; Bruder, Leuders & Büchter, 2008). Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Ausgangspunkt und paradigmatische Ausrichtung der Bemühungen um gute Aufgaben ein guter Unterricht ist (vgl. Leuders, 2001, S. 94 ff.) und solche Aufgaben, entsprechend unterrichtlich ein- bzw. umgesetzt, aktiv-entdeckendes Lernen ermöglichen, ein stimmiges Bild von Mathematik und ihren Anwendungen zeichnen, konkurrierende Lösungsansätze zulassen und Erfahrungen für mathematische Begriffsbildungen bieten (vgl. BLK, 1997, S. 14 ff; Büchter & Leuders, 2005, S. 13).

In spezifischem Fokus auf einen datenorientierten Stochastikunterricht stehen insbesondere Modellierungsbeispiele im Mittelpunkt des Interesses: Daten sind als Kontextzahlen immer mit einem situativen Problemhintergrund verbunden, zu dem die Daten quantifizierende Informationen bereit stellen. In didaktischer Hinsicht lassen sich entsprechende Beispielaufgaben unterscheiden (vgl. Eichler & Vogel, 2013, S. 140 ff.):

Beispiele zur „realen Realität“, bei deren Bearbeitung die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt werden zu erfahren, dass sie mit den ihnen zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln echte (im Sinne von nicht von vorneherein für den Unterricht konstruierten) Fragen der sie umgebenden technischen, sozialen und natürlichen Umwelt zumindest ein Stück weit beantworten können. Hierzu zählen etwa gesellschaftspolitische Fragen, wie z. B. die mit dem Ärzteprotest verbundenen politischen Diskussionen, ob Ärzte in Deutschland zu viel oder zu wenig verdienen (vgl. Eichler & Vogel, 2013; S. 41 ff.). Beispiele aus diesem Bereich dienen der rekonstruktiven Datenanalyse (ibid., S. 140), durch die die Schülerinnen und Schüler erfahren sollen, mit welchen stochastischen Mitteln in der Realität argumentiert werden kann bzw. auch tatsächlich wird. Beispiele der rekonstruktiven Datenanalyse sollen unmittelbar dem Ziel dienen, die Schülerinnen und Schüler zu einer kritischen und mündigen Teilhabe am Leben einer demokratischen aufgeklärten Gesellschaft zu befähigen.

Beispiele zu konstruierten realen Situationen beziehen sich nicht auf die „großen Fragen der Gesellschaft“, sondern auf „kleinere“, durchaus auch künstlich generierte, aber dennoch reale Phänomene. Hierbei kann es sich um Fragen handeln, die für die Schülerinnen und Schüler unmittelbar von Belang sind (vor dem Computer verbrachte Zeit, vgl. Eichler, 2009), aber auch um Analysen von im Internet erhältlichen Daten zu Sportgeschehnissen wie z. B. Skispringen (Eichler & Vogel, 2013, S. 89 ff.), Fragen nach der Sicherheitsgrenze für einen Nicht-Abstieg aus der Fussball-Bundesliga (ibid., S. 48 ff.) oder Fragen der physikalischen Umwelterschließung, wie z. B. die kritische Betrachtung verfügbarer meteorologischer Daten (ibid., S. 21 ff.), der Frage nach der Schallgeschwindigkeit (ibid., S. 103 ff.) oder dem weltweiten CO_2-Anstieg (ibid., S. 107 ff.). Aber auch bei der Arbeit mit „Mickey-Mouse“-Daten (vgl. Engel, 2007, S. 16), welche nicht unmittelbar die Eigenschaften der Schülerinnen und Schüler betreffen und auch inhaltlich (in der Regel) nicht weiter ernst zu nehmen sind, wie z. B. der Sprungweitenvergleich von großen und kleinen Papierfröschen (Eichler & Vogel, 2013, S. 7 ff.) oder die Frage nach der Farbverteilung von Schokolinsen (Engel & Vogel, 2005; Eichler & Vogel, 2013, S. 31 ff.), können die Schülerinnen und Schüler den gesamten Modellierungskreislauf in Form einer datenanalytischen Modellierung (Eichler & Vogel, 2013a) durchlaufen: Problemstellung – Planung und Durchführung der Datenerhebung – Auswertung – Interpretation und Schlussfolgerungen (vgl. Biehler & Hartung, 2006, S. 53).

Beispiele zur Analyse konstruierter Daten dienen dazu, die Reichweite und Grenzen statistischer Begriffe und Methoden für die Schülerinnen und Schüler erfahrbar werden zu lassen. Die Daten sind in diesem Fall fiktiv und offensichtlich, auch für die Schülerinnen und Schüler, gezielt so konstruiert, dass mathematische Eigenschaften wie z. B. der Robustheit des Medians (gegenüber dem arithmetischen Mittel) anhand von sechs fiktiven Ärzteeinkommensdaten (Eichler & Vogel, 2013, S. 43) oder unterschiedliche mathematische Konzepte zur Beschreibung einer „Mitte" anhand von konstruierten Firmengehältern (ibid., S. 45 f.) deutlich heraustreten. Hier wird der situative Problemhintergrund in seiner Bedeutsamkeit bewusst soweit reduziert, dass lediglich ein inhaltlicher Rahmen für die fokussierte Betrachtung statistischer Begriffe und Methoden verbleibt.

Im Hinblick auf die didaktische Verortung im Unterrichtsgeschehen steht bei der unterrichtlichen Analyse konstruierter Daten der Zugang zum sachverständigen mathematischen Werkzeuggebrauch im Vordergrund der unterrichtlichen Bemühungen. Dagegen eignen sich die ersten beiden Beispieltypen eher, um thematische Zugänge im Sinne eines anwendungsbezogenen Mathematikunterrichts zu schaffen: Bei Beispielen zur „realen Realität" und zu konstruierten realen Situationen steht der realweltliche Erkenntnisgewinn im Mittelpunkt des unterrichtlichen Interesses. Die Schülerinnen und Schüler wenden anhand ausgewählter Beispiele statistische Arbeitsweisen und Verfahren an, um erklärende oder zumindest erhellende Antworten auf eine kontextuelle Ausgangsfrage zu erhalten.

5 Alles neu …?

Über die Eignung der Beispiele hat die Lehrkraft nach verschiedenen Kriterien zu entscheiden. Die in Abschnitt 3 genannten Kriterien sind aus einer unterrichtspraktischen Sichtweise heraus entwickelt dargestellt. Das theoretische Fundament dazu lässt sich unserer Auffassung nach überzeugend im Prinzip des *Exemplarischen* der bildungstheoretischen Didaktik (z. B. Klafki, 1957) verorten: Als *exemplarisch* ist nicht das Beispiel zu bezeichnen, das lediglich unter dem Kriterium der Vermeidung von Stofffülle gewählt wird. Bildend im bildungstheoretischen Sinn sind Beispiele dann, wenn sie *„elementar im Hinblick auf die Sache* (im Besonderen ein Allgemeines zeigen) und wenn sie *fundamental im Hinblick auf die Schüler* (Grunderfahrungen und grundlegende Einsichten vermitteln)" (Jank & Meyer, 1991, S. 146) sind, als pädagogisch-exemplarisch können sie dann bezeichnet werden, wenn „sie Fundamentales oder Elementares aufzuschließen vermögen" (Klafki, 1961, S. 191). Die Zitate und die genannten Quellen zeigen, dass diese Einsichten nicht neu, sondern im Gegenteil einer längeren Tradition bildungstheoretischer Überlegungen folgen und gerade deshalb lohnt es sich, dies im aktuellen Diskurs der heutigen, zuweilen sehr „bildungsmetrischen" Zeit wieder einmal in Erinnerung zu rufen.

Anmerkung

1 Entsprechende Arbeitsblätter und Rechner-Dateien können von den Autoren für rein unterrichtliche Zwecke bezogen werden.

Literatur

Biehler, R. & Hartung, R. (2006). Leitidee Daten und Zufall. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Eds.), *Bildungsstandards Mathematik konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 51–80). Berlin: Cornelsen Scriptor.

BLK – Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (Hrsg.). (1997). *Gutachten zur Vorbereitung des Programms zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts.* Bonn.

Bruder, R., Leuders, T. & Büchter, A. (Hrsg.) (2008). *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für ein kompetenzorientiertes Unterrichten.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Eichler, A. (2009). Zahlen aufräumen – Daten verstehen (Basisartikel). *PM – Praxis der Mathematik in der Schule, 51*(26), 1–7.

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Die Leitidee Daten und Zufall.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Eichler, A. & Vogel, M. (2013a). Daten- und Wahrscheinlichkeitsanalyse als Modellierung. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule* (S. 163–180). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Eichler, A. & Vogel, M. (2012). Stochastik – fit für die Zukunft (Basisartikel). *PM – Praxis der Mathematik in der Schule, 54*(48), S. 2–9.

Eichler, A. & Vogel, M. (2011). *Leitfaden Stochastik.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Engel, J. (2007). Daten im Mathematikunterricht: Wozu? Welche? Woher? *MU – Der Mathematikunterricht, 3*, 12–22.

Engel, J. & Vogel, M. (2005). Von M&Ms und bevorzugten Farben: ein handlungsorientierter Unterrichtsvorschlag zur Leitidee Daten & Zufall in der Sekundarstufe I. *Stochastik in der Schule, 25*(2), 11–18.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Stuttgart: Klett.

Herget, W. (Hrsg.) (2000). Aufgaben öffnen. *mathematik lehren, 100.*

Jank, W. & Meyer, H. (1991). *Didaktische Modelle.* Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor.

Klafki, W. (1957). *Das pädagogische Problem des Elementaren und die Theorie der kategorialen Bildung.* Weinheim: Beltz.

Klafki, W. (1961). Das Elementare, Fundamentale, Exemplarische. In H.-H. Groothoff & M. Stallmann (Hrsg.), *Pädagogisches Lexikon* (S. 189–194). Stuttgart: Kreuz-Verlag.

Klieme, E., Neubrand, M. & Lüdtke, O. (2001). Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: J. Baumert, E. Klieme, M. Neubrand, M. Prenzel, U. Schiefele, W. Schneider, P. Stanat, K.-J. Tillmann & M. Weiß (Hrsg.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 139–190). Opladen: Leske+Budrich.

Leuders, T. (2001). *Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Schulz, W. (1970). Aufgaben der Didaktik. Eine Darstellung aus lehrtheoretischer Sicht. In D. C. Kochan (Hrsg.), *Allgemeine Didaktik – Fachdidaktik – Fachwissenschaft. Ausgewählte Beiträge aus den Jahren 1953 bis 1969* (S. 403–440). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Seneca, L. A. Epistularum moralium ad Lucilium, *liber primus*, epistula 6, URL: http://www.thelatinlibrary.com/sen/seneca.ep1.shtml (Stand: 20.6.2014).

Vehling, R. (2011). Mit Simulationen zum Konfidenzintervall. *PM – Praxis der Mathematik in der Schule, 53* (39), 25–29.

Vollrath, H.-J. (2003). *Algebra in der Sekundarstufe.* Heidelberg: Spektrum

Anschrift der Verfasser

Markus Vogel
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561
69120 Heidelberg
vogel@ph-heidelberg.de

Andreas Eichler
Institut für Mathematik
Universität Kassel
Gebäude AVZ III, Raum 2435
Heinrich-Plett-Straße 40
D-34132 Kassel
eichler@mathematik.uni-kassel.de